

Méthode des volumes pour les problèmes de [1]

convection - diffusion

Introduction : Dans les problèmes où l'écoulement de fluide joue un rôle significatif, on doit tenir compte des effets de convection. L'équation stationnaire de convection - diffusion pour la propriété générale ϕ s'écrit :

$$\text{div}(\rho \vec{u} \phi) = \text{div}(\Gamma \text{ grad } \phi) + S_\phi.$$

cette équation représente le bilan du flux dans un volume de contrôle. le terme à gauche donne le flux convectif pur et celui à droite la diffusion pure et la génération ou la destruction de la propriété ϕ .

Equation de la convection - diffusion en 1D :

En l'absence du terme source, la convection - diffusion stationnaire de la propriété ϕ dans un champ d'écoulement u est donnée par :

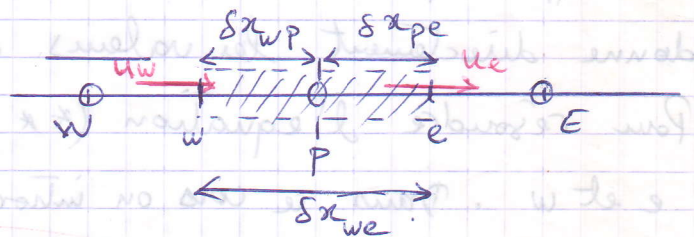
$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right).$$

L'écoulement doit satisfaire l'équation de continuité :

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0.$$

Considérons le volume de contrôle dans une seule direction 1D, montré par la figure.

L'intégration de l'équation sur le volume de contrôle donne :



$$\int_V \frac{d}{dx}(\rho u \phi) dV = \int_V \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) dV.$$

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w. \quad (*)$$

L'intégration de l'équation de continuité donne

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0. \quad (**)$$

Pour obtenir l'équation de discrétisation du problème de convection-diffusion, on doit approximer les termes dans l'équation (*)

On définit deux variables F et D qui représentent le flux convectif par unité de surface et la conductance de la diffusion aux faces des cellules.

$$\boxed{F = \rho u} \quad \text{et} \quad \boxed{D = \frac{\Gamma}{\delta x}}$$

les valeurs des variables F et D peuvent être écrites aux faces :

$$F_w = (\rho u)_w \quad F_e = (\rho u)_e$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}}$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}$$

On suppose que $A_w = A_e = A$ et utilisant le schéma aux différences centrées pour approximer les termes de diffusion l'équation (*) devient :

$$\boxed{F_e \cdot \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)} \quad (***)$$

et celle de la continuité :

$$\boxed{F_e - F_w = 0}$$

On suppose que la vitesse de l'écoulement est connue, ce qui donne directement les valeurs de F_e et F_w .

Pour résoudre l'équation (***), on a besoin de ϕ aux faces e et w . Dans ce cas on introduit les schémas numériques

- les schémas numériques :

schéma aux différences centrées : le schéma aux différences centrées est utilisé pour approximer les termes convectifs diffusifs qui apparaissent à droite de l'équation (***)

il paraît logique de prendre une approximation linéaire pour calculer les valeurs aux faces pour les termes convectifs du côté gauche de la même équation.

Pour un maillage uniforme on peut écrire les valeurs de la propriété ϕ aux faces de la maille comme suit :

$$\phi_e = (\phi_p + \phi_E) / 2$$

$$\phi_w = (\phi_w + \phi_p) / 2$$

en remplaçant ces deux termes dans l'équation (***) :

$$\frac{F_e}{2} (\phi_p + \phi_E) - \frac{F_w}{2} (\phi_w + \phi_p) = D_e (\phi_E - \phi_p) - D_w (\phi_p - \phi_w)$$

En réarrangeant, on trouve :-

$$\left[(D_w - \frac{F_w}{2}) + (D_e + \frac{F_e}{2}) \right] \phi_p = (D_w + \frac{F_w}{2}) \phi_w + (D_e - \frac{F_e}{2}) \phi_E$$

d'une autre façon :

$$\left[(D_w + \frac{F_w}{2}) + (D_e - \frac{F_e}{2}) + (F_e - F_w) \right] \phi_p = (D_w + \frac{F_w}{2}) \phi_w + (D_e - \frac{F_e}{2}) \phi_E$$

On a :

$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_E \phi_E$ - c'est l'expression aux différences centrées pour l'équation de convection - diffusion discrétisée.

a_w	a_E	a_p
$D_w + \frac{F_w}{2}$	$D_e - \frac{F_e}{2}$	$a_w + a_E + (F_e - F_w)$

On voit que cette équation prend la même forme générale que celle de la diffusion pure. La différence est dans les coefficients qui contiennent des termes qui tiennent compte la convection.

Propriétés des schémas de discrétisation :

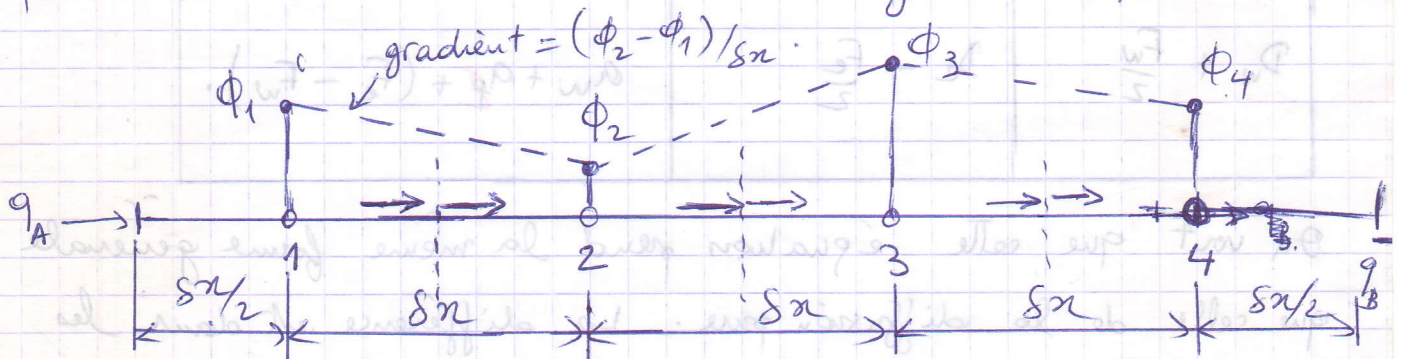
L'incapacité du schéma aux différences centrées dans certains cas de la convection diffusion nous oblige à étudier les propriétés des schémas numériques de discrétisation.

En théorie, les résultats numériques peuvent être obtenus conformes à la solution exacte de l'équation de transport lorsque le nombre des nœuds est très grand. Cependant, dans le cas pratique on ne peut utiliser que des maillages assez grands ou même petits. Dans ce cas les schémas numériques doivent respecter quelques propriétés fondamentales :

Conservation :

L'intégration de l'équation de convection - diffusion sur un nombre fini de volumes de contrôle donne un ensemble d'équations de discrétisation faisant intervenir des flux de ϕ à travers les faces des volumes de contrôle. Pour assurer la conservation de ϕ sur tout le domaine, le flux ϕ quittant un volume de contrôle à travers une face doit être égal au flux de ϕ entrant la face adjacente du volume de contrôle suivant.

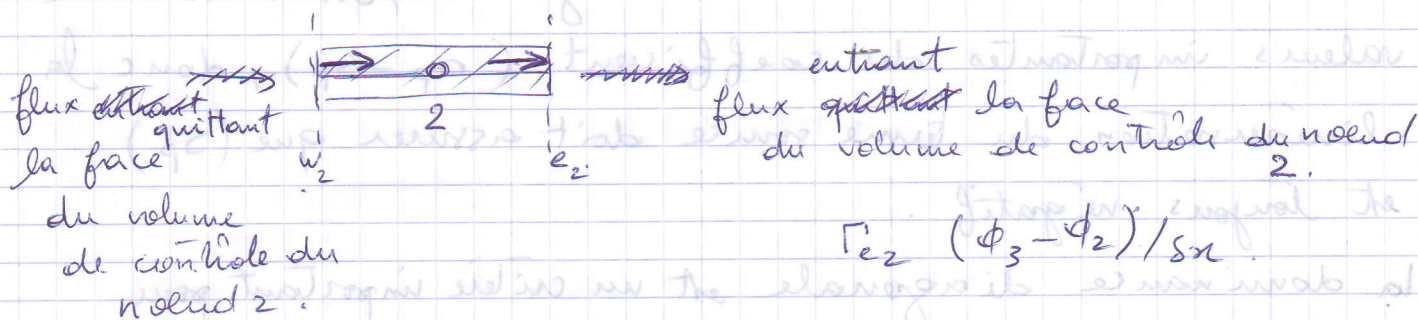
« le flux à travers une face commune doit être représenté d'une manière consistante par une seule ~~composante~~ et unique expression dans les volumes de contrôles adjacents ».



Prenons l'exemple de la diffusion stationnaire 1D montrée sur la figure.

la somme des flux à travers les volumes de contrôle des nœuds 1 à 5 en appliquant le schéma des différences centrées est :

$$\begin{aligned} & \left(\Gamma_{e1} \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{\delta x} - q_A \right) + \left(\Gamma_{e2} \frac{(\phi_3 - \phi_2)}{\delta x} - \Gamma_{w2} \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{\delta x} \right) \\ & + \left(\Gamma_{e3} \frac{(\phi_4 - \phi_3)}{\delta x} - \Gamma_{w3} \frac{(\phi_3 - \phi_2)}{\delta x} \right) + \left[\Gamma_{e4} \frac{(\phi_5 - \phi_4)}{\delta x} - \Gamma_{w4} \frac{(\phi_4 - \phi_3)}{\delta x} \right] \\ & + \left[q_B - \Gamma_{w5} \frac{(\phi_5 - \phi_4)}{\delta x} \right] = q_B - q_A. \end{aligned}$$



$$\Gamma_{w2} (\phi_2 - \phi_1) / \delta x.$$

puisque $\Gamma_{e1} = \Gamma_{w2}$; $\Gamma_{e2} = \Gamma_{w3}$ et $\Gamma_{e3} = \Gamma_{w4}$.

les flux à travers les faces des volumes de contrôle sont exprimés d'une manière consistante et se simplifient deux à deux lorsqu'on fait la somme sur le domaine entier. Seulement deux flux restent, ceux des limites, ce qui fait que l'équation exprime la conservation à travers tout le domaine pour le schéma aux différences centrées du flux diffusif.

Limitation : À chaque nœud, les équations discrétisées représentent un ensemble d'équations algébriques qui doivent être résolues. Pour les grands systèmes d'équations, les méthodes itératives sont utilisées. Ces méthodes supposent un estimé initial et répètent des itérations jusqu'à la convergence. Une condition suffisante pour la convergence de la méthode itérative est :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum |a_{nb}|}{|a_p|} &\leq 1 \quad \text{pour tous les nœuds.} \\ &< 1 \quad \text{pour un nœud au moins.} \end{aligned} \right\}$$

Ici a_p est le coefficient du nœud central ($a_p = q_p - s_p$) et la somme dans le numérateur est prise ~~sur~~ tous les nœuds adjacents (nb neighbouring).

Le schéma de discrétisation doit satisfaire ce critère qui s'appelle aussi matrice "diagonalement dominante".

Pour assurer la dominance diagonale, on a besoin de valeurs importantes du coefficient ($a_p - s_p$), donc la linéarisation du terme source doit assurer que (s_p) est toujours négatif.

la dominance diagonale est un critère important pour satisfaire la limitation. Ce critère veut dire qu'en l'absence des termes sources, les valeurs internes de ϕ dans les nœuds doit être limitée par les valeurs aux limites.

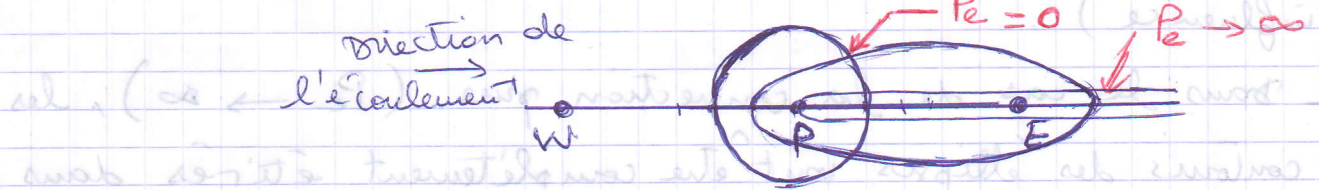
Une autre nécessité pour le critère est que tous les coefficients de l'équation de discrétisation doivent avoir le même signe (tjs positif).

Physiquement cela implique qu'une augmentation de ϕ dans un nœud engendre une augmentation dans les nœuds adjacents.

Si le schéma numérique ne satisfait pas cette condition, la solution peut diverger ou donner des solutions non physiques.

Transportivité:

Considérons une source constante de ϕ au point P (voir fig.)



On définit un nombre non dimensionnel dans le volume de contrôle, le nombre de Peclet qui mesure la force de la convection et diffusion.

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{su}{\Gamma / \delta x}$$

ou δx est l'épaisseur du volume de contrôle ou de la cellule ou maille.

les formes sur la figure montrent l'allure des contours de $\phi = cte$ (par exemple $\phi = 1$) pour différentes valeurs de "Pe".

Considérons deux cas extrêmes pour identifier l'influence du point (nœud amont) P sur le nœud en aval E.

- * diffusion Pure ($Pe = 0$).
- * convection Pure ($Pe \rightarrow \infty$).

Dans le 1^{er} cas de la diffusion pure, le fluide est stagnant, les contours de $\phi = cte$ sont des cercles concentriques avec P au centre, car la diffusion tend à propager ϕ également (uniformément) dans toutes les directions.

les conditions au point E (Est) vont être influencées peu ceux du point "P" et de ceux plus loin en aval.

- Quand "Pe" augmente ; l'allure des contours change vers une forme elliptique avec un déplacement dans la direction de l'écoulement.

le point "E" se trouve fortement influencé par "P", mais "P" n'aura aucune influence exercée par "E" (ou une faible influence).

- Dans le cas de la convection pure ($Pe \rightarrow \infty$), les contours des ellipses vont être complètement étirés dans le sens de l'écoulement.

Toutes les propriétés en "P" vont être immédiatement transportées en "E". Alors, la valeur de ϕ à E est affectée seulement par les conditions amont et puisqu'il n'y a pas de diffusion, $\phi_E = \phi_P$.

il est important que la relation entre la magnitude du nombre de Peclet et l'influence ~~de la diffusion~~ dans la direction connue sous le nom "Transportivité" soit confirmée par le schéma de discrétisation.